[1] Mohammad.H.Rahim35435@st.tu.edu.iq

[2] Awny.muhammed@tu.edu.iq

الطريقة الصريحة لحل معادلة الموجة ثنائية البعد

[1] محمد حسن رحيم , [2] أ.م عوني محمد كفطان

[1,2] قسم الرياضيات - كلية علوم الحاسوب والرياضيات – جامعة تكريت – العراق

[1] Mohammad.H.Rahim35435@st.tu.edu.iq

[2] Awny.muhammed@tu.edu.iq

المستخلص:

في هذا البحث استخدمنا الطريقة الصريحة(Explicit Method) لحل معادلة الموجة في البعد الثاني مع شروط حدودية وابتدائية حيث قدمنا الصيغة العامة لهذه الطريقة ومنها استخدمنا الصيغة العامة لمعادلة الموجة في البعد الثاني مع شروط ابتدائية وشروط حدودية ضمن الفترة [0,2]وبدءاً من الزمن (t=0) الى زمن محدد ومعلوم($i = l$).

الكلمات المفتاحية: الطريقة الصريحة المعادلة الموجية، معادلة الموجة أحادية البعد.

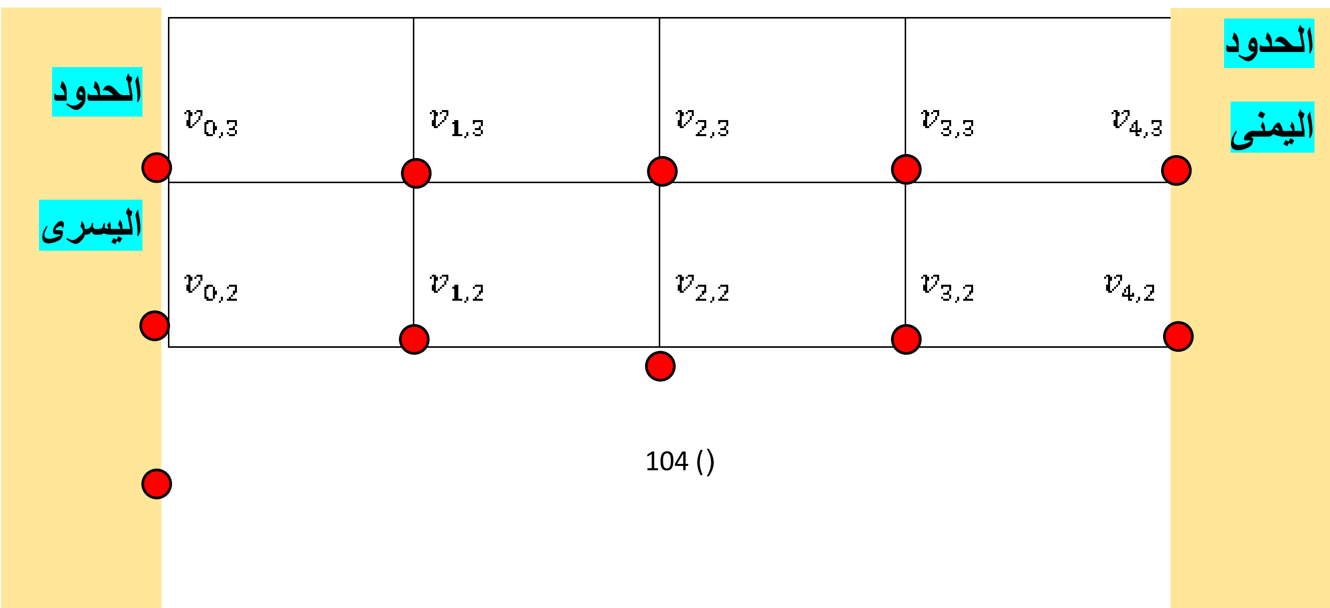
1- المقدمة

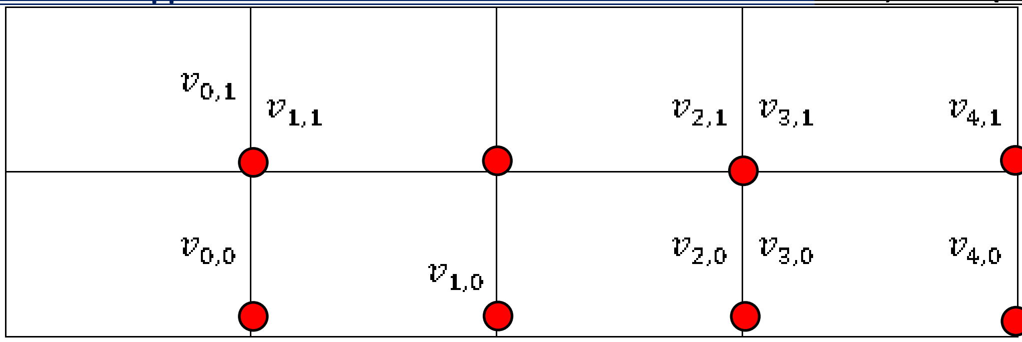
تعتبر الطريقة الصريحة والطريقة الضمنية من طرق الفروقات العددية التي تستخدم في حل العديد من المسائل المرونة ومسائل انتشار الحرارة وانتشار الغاز ومعادلة الموجة في البعد الواحد او في البعد الثاني.

في عام (2004) استخدم (Recktenwald) تقريبات الفروقات المنتهي في حل مسائل انتشار الحرارة [5] ، في عام (2005) تم تقديم (S.P. Sukhame) الأشكال العامة لانتقال الحرارة وحلها العددي ،اما في عام (2019) فقد استخدم (Awni) طريقة فروقات (θ) والتي احدى الطرق فيها الطريقة الصريحة لاختيار كفاءة العزل الحراري لبعض المواد [2] ، وفي عام (2020) استخدم (M.Adak) الطريقة الصريحة ذات الفروقات المنتهية لحل معادلات الانتشار وفي نفس البحث الذي استخدم فيه أيضا الطريقة الضمنية في حل نفس المعادلات وقارن بين نتائج الطريقتين [1].

2- الطريقة الصريحة (Explicit Method)[1] [2] .

انها احدى الطرق التحليل العددي التي تعبر عن قيم الزمن في كل من الأزمنة المستقبلية $(t + \Delta t)$ ، والزمن الحالي t وما سبق من معلومات الزمن الماضي $(t - \Delta t)$ ، وتوصف الطريقة الحالية لضمان حل أحد التطبيقات في معادلة توافقية وفي معادلة ثنائية التوافق، سواء كانت معادلة حرارية، أو معادلة موجية، أو معادلة مرونة، إلخ. لبعض الزمن، يتم ذلك عن طريق تقسيم منطقة إلى عدة مستويات: يمثل كل مستوى من هذه المستويات مقدار التغيير بمرور الزمن، ثم يتم تقسيم المستوى إلى عدة أجزاء متساوية في شكل نقاط حيث يرمز لها بالرمز $v_{i,j}$ اذ يمثل j مستوى الزمن وتمثل i موقع النقطة عند ذلك المستوى ويؤشر الرمز $v_{i,j+1}$ الى الزمن في المستقبل كما موضح في الشكل (1)





شكل (1) يوضح تقسيم منطقة الحل الى مستويات وتكون على شكل شبكة مستطيلة.

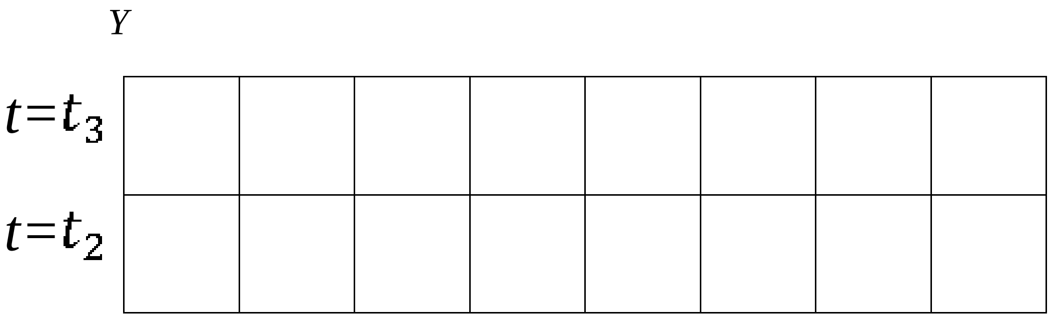
يتم تحديد الشروط الابتدائية وأيضا الشروط الحدودية اليمنى واليسرى ، ثم يبدأ مستوى الصفر وهناك يتم تحديد النقاط علية حيث $v_{0,0}$ يمثل قيمة الشرط الابتدائي للمعادلة التوافقية او معادلة ثنائية التوافق عند مستوى الصفر عندما تكون t = 0 و x = 0 ، بينما يمثل $v_{1,0}$ قيمة الشرط الابتدائي للمعادلة التوافقية وثنائية التوافق لمستوى الصفر عندما t = 0 و x = 1 ، إلخ. يستمر لنقاط مستوى الصفر المتبقية ، بينما يمثل المستوى الأول $v_{0,1}$ قيمة الشرط الابتدائي عندما x=0 والنقطة $v_{1,1}$ تمثل قيمة المعادلة التوافقية وثنائية التوافق(درجة حرارة, مرونة, موجة...الخ) المستوى الأول عندما تكون x=1 وما إلى ذلك ، بالنسبة لبقية النقاط والمستويات الأعلى المماثلة التي يتم رسمها. ونحدد النقاط الموجودة عليها ونجد تلك القيم باستخدام الصيغة العامة للطريقة الصريحة لمعادلة الموجة في بعدين.

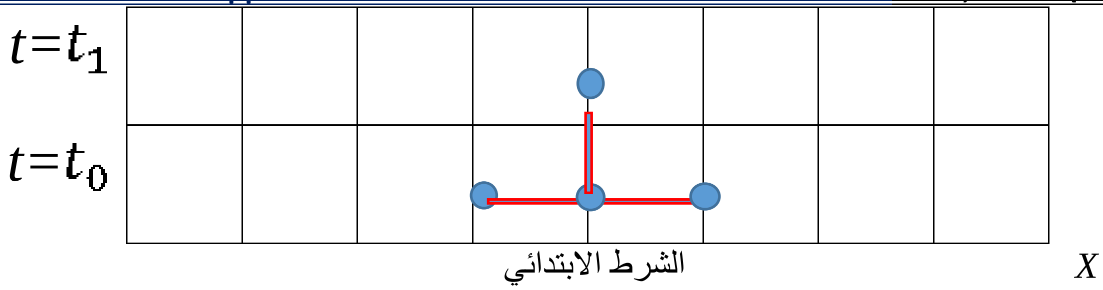
$$(1-R)v_{i,j+1} = (4-2R)v_{i,j} - (1-R)v_{i,j-1} - v_{i-1,j} - v_{i+1,j} \quad \dots (1)$$

حيث ان: - $\forall i = 1,2,3,\dots,n \ , \ \forall j = 0,1,2,3,\dots m$

$$R = \frac{h^2}{c^2(\Delta t)^2} \quad , \quad (\Delta x)^2 = h^2$$

بسهولة فأن الطريقة الصريحة موضحة في الشكل (2).[2][1]





شكل (2) يوضح الطريقة الصريحة

3- خوارزمية الطريقة الصريحة.

العناصر الداخلة: الدالتين f(x)،g(x) والشروط الابتدائية والحدودية وقيم h ,Δx ,Δt .

العناصر الخارجة: قيم النقاط $v_{i,j+1}$

خطوات العمل:

1- نقوم بعمل منطقة وتكون على شكل شبكة مستطيلة ونضع فيها قيم الشروط الحدودية وقيم الشروط الابتدائية المذكورة بالمسألة.
2- تعويض قيم $(\forall i = 1,2,3, \dots , n\, , j = 0)$ في الصيغة العامة للمعادلة الطريقة الصريحة (1)
3- تعويض قيم الشروط الحدودية وقيم الشروط الابتدائية وقيمة R في الصيغة العامة للمعادلة الطريقة الصريحة منها نحصل على معادلة مع إضافة الى تعويض قيم الشروط الحدودية والشروط الابتدائية.
4- بعد تعويض القيم الابتدائية والحدودية نحصل على قيم $(v_{3,1}, v_{2,1}, v_{1,1})$ وبعد ذلك نقوم بتكرار العملية على الخطوات السابقة عندما j=1
5- نستمر في تكرار العملية حتى نحصل على الحل التقريبي المضبوط وفق الشروط

4- الشروط الابتدائية.[5]

لكي نحل معادلة تفاضلية جزئية من الدرجة الثانية يتطلب معرفة الشروط الابتدائية لأي معادلة توافقية وثنائية التوافق حينما نحل مسائل التي تظهر في المعادلتين التوافقية وثنائية التوفق علينا معرفة الشروط الابتدائية للمعادلة الموجة والتي تعتمد على دالتين g وf كدالات جيبيه خطية او كدالات اسية مركبة

$$v(x,t)_{t=0} = g(x) \quad , \quad v(x,t)_{t=0} = f(x)$$

$$v(x,t) = v(x) \quad , \quad 0 < x < l$$

5- الشروط الحدودية وانواعها[3][8] .

تتكون الشروط الحدودية للمعادلة التوافقية وثنائية التوافق من مجموعة أنواع كالاتي

1- تتحقق الشروط الحدودية للمعادلتين التوافقية وثنائية التوافق وفق الصيغ الرياضية الاتية

$$v(t,0) = v_1(t) \quad , \quad 0 < x < l$$

$$v(t,l) = v_2(t) \quad , \quad 0 < x < l$$

ويدعى هذا الشرط الحدودي بشرط (*Dirichlet Condition*) والتي تكون قيمة الدالة واضحة (معروفة) خلال كل نقطة حدودية على حدود منطقة الحل

2- بينما الشرط الحدودي في المعادلة التوافقية وثنائية التوفق المخصصة خلال حدود أي منطقة تكون بالصورة الاتية

$$c\frac{\partial v}{\partial x}(t,0) = 0$$

يدعى شرط نيومان (*Neumann Condition*) حيث تكون قيمة مشتقة الدالة المستعملة واضحة خلال كل نقطة حدودية

3- شرط روبن (*Robin Condition*) خلال الحدود يكون بالصيغة

$$c\frac{\partial v}{\partial x} + \mathrm{h}v(t,I) = g(t)$$

وهذا الشرط يعول على المشتقة الجزئية للدالة خلال المتغير x

وخلاصة تتم استخدام الشروط الثلاثة التي ذكرت سابقا خلال حدود المنطقة بالتعويل على معرفة قيمة الدالة مرة ومعرفة قيمة المشتقة لها خلال كل منطقة او على جزء من الحدود

ويمكن ان تكون جميع الشروط مختلطة فأمرة نستطيع الحصول على بعض قيم الدالة او مشتقاتها خلال بعض النقاط الحدودية لذلك يجب التعويض عن الشروط الحدودية مرة بالدالة نفسها ومرة بمشتقاتها

6- اشتقاق الصيغة العامة للطريقة الصريحة لحل معادلة الموجة ثنائية البعد[4][7] .

ان الصيغة العامة لمعادلة الموجة ثنائية البعد هي

$$\nabla^2 \mathrm{v} = \frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}^2} = \left[\frac{1}{\mathrm{c}^2}\right]\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial \mathrm{t}^2} \qquad \ldots (2)$$

والتي تكتب أيضا بالصيغة الرياضية الاتية

$$v_{xx} + v_{yy} = \frac{1}{c^2}v_{tt} \qquad \ldots (3)$$

لكي نحصل على الصيغة العامة للطريقة الصريحة سوف نقوم باستبدال المشتقات الجزئية المتمثلة بالصيغة الاتية

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = v_{xx}\,, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = v_{tt}\,, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = v_{yy}$$

بالفروقات المنتهية (الامامية، المركزية، الخلفية) [8]

$$v_{xx} = \frac{v_{i-1,j} - 2v_{i,j} + v_{i+1,j}}{h^2} \qquad \ldots (4)$$

$$v_{yy} = \frac{v_{i-1,j} - 2v_{i,j} + v_{i+1,j}}{h^2} \quad \dots (5)$$

$$v_{tt} = \frac{v_{i,j-1} - 2v_{i,j} + v_{i,j+1}}{k^2} \quad \dots (6)$$

$$\forall i = 1,2,3,\dots,n \;, \qquad \forall j = 0,1,2,3,\dots,m$$

حيث ان $(\Delta x)^2 = (\Delta y)^2 = h^2 \;, (\Delta t)^2 = k^2$

نعوض الفروقات المنتهية والمتمثلة في المعادلات الثلاث (4) و (5) و (6) في معادلة (3) فتكون بالشكل التالي

$$\frac{v_{i-1,j} - 2v_{i,j} + v_{i+1,j}}{h^2} + \frac{v_{i,j-1} - 2v_{i,j} + v_{i,j+1}}{h^2} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{v_{i,j-1} - 2v_{i,j} + v_{i,j+1}}{k^2}\right) \quad \dots (7)$$

نضرب المعادلة (7) في (h^2) للطرفين فأتصبح المعادلة كالاتي

$$v_{i-1,j} + v_{i+1,j} - 4v_{i,j} + v_{i,j-1} + v_{i,j+1} = \frac{h^2}{c^2k^2}\left(v_{i,j-1} - 2v_{i,j} + v_{i,j+1}\right) \quad \dots (8)$$

نفرض ان

$$R = \frac{h^2}{c^2k^2}$$

فأتصبح المعادلة بالصورة الاتية

$$v_{i-1,j} + v_{i+1,j} - 4v_{i,j} + v_{i,j-1} + v_{i,j+1} = R\left(v_{i,j-1} - 2v_{i,j} + v_{i,j+1}\right) \quad \dots (9)$$

وبعد التبسيط واجراء العمليات تصبح المعادلة بالشكل الاتي

$$(1-R)v_{i,j+1} = (4-2R)v_{i,j} - (1-R)v_{i,j-1} - v_{i-1,j} - v_{i+1,j} \quad \dots (10)$$

حيث ان: $\forall i = 1,2,3,\dots,n \;, \; \forall j = 0,1,2,3,\dots m$ -

$$R = \frac{h^2}{c^2(\Delta t)^2} \quad , \qquad (\Delta x)^2 = h^2$$

حيث ان المعادلة (10) هي الصيغة العامة للطريقة الصريحة.

مثال 1/ لتكن لدينا معادلة موجة ثنائية البعد بالصيغة الاتية

$$\frac{1}{16}v_{tt} = v_{xx} + v_{yy}$$

حيث ان $x \in [0,2]\,, t \in [0,l]$ مع الشروط الحدودية الاتية

$$v(0,t) = v(1,t) = 1$$

والشروط الابتدائية

$$v(x,0) = f(x) = \cos x \quad , v(x,0) = g(x) = 2$$

علما ان

$$0 < x < 2\,, \qquad h = 0.5\,, \qquad \Delta t = 0.5\,\text{sec}$$

حل المعادلة باستخدام الطريقة الصريحة؟

الحل/ نكتب الصيغة العامة للمعادلة الموجة ثنائية البعد

$$(1-R)v_{i,j+1} = (4-2R)v_{i,j} - (1-R)v_{i,j-1} - v_{i-1,j} - v_{i+1,j} \qquad \dots (1)$$

$$\forall i = 1,2,3,\dots,n\,, \qquad \forall j = 0,1,2,3,\dots,m$$

وأيضا نكتب الصيغة الاتية

$$v_{i,-1} = v_{i,1} - 2\Delta t g_i\,, \qquad \forall i = 1,2,3,\dots n \qquad \dots (11)$$

نجد قيمة R في البداية من الصيغة الاتية

$$R = \frac{h^2}{c^2(\Delta t)^2} = \frac{(0.5)^2}{16(0.5)^2} \Rightarrow R = 0.0625$$

$$v(x,0) = f(x) = \cos x$$

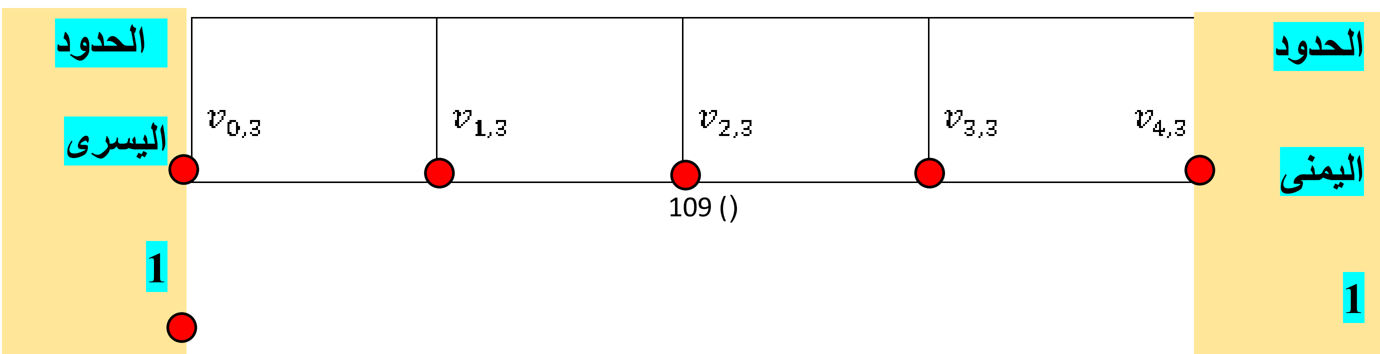
$$v(0,0) = v_{0,0} = \cos 0 = 1$$

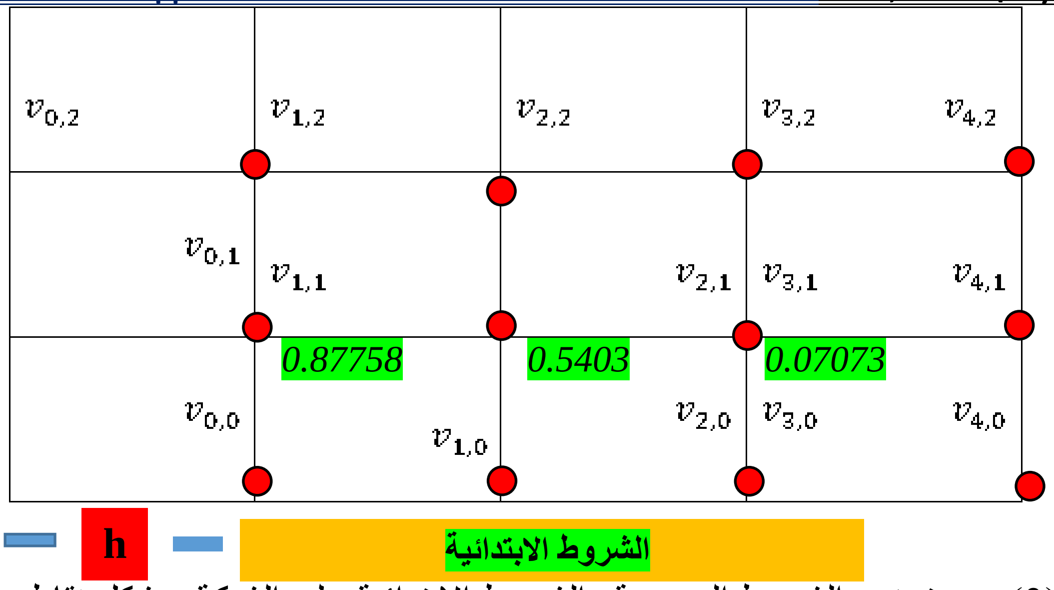
$$v(0.5,0) = v_{1,0} = \cos(0.5) = 0.87758$$

$$v(1,0) = v_{2,0} = \cos(1) = 0.5403$$

$$v(1.5,0) = v_{3,0} = \cos(1.5) = 0.07073$$

$$v(2,0) = v_{4,0} = 1$$





الشكل (3) يبين توزيع الشروط الحدودية والشروط الابتدائية على الشبكة وبشكل نقاط عقدية.

الان نأخذ عندما $i = 1,2,3 \;\; ,j = 0$

$i = 1 \;\; ,j = 0$

$$(1-R)v_{1,1} = (4-2R)v_{1,0} - (1-R)v_{1,-1} - v_{0,0} - v_{2,0} \qquad \dots(12)$$

نجد قيمة $v_{1,-1}$ من خلال المعادلة $(1-11)$ عندما $i = 1$

$$v_{1,-1} = v_{1,1} - 2\Delta t g_1 \dots(13)$$

$$v_{1,-1} = v_{1,1} - 2(0.5)(2)$$

$$v_{1,-1} = v_{1,1} - 2 \qquad \dots(14)$$

الان نعوض معادلة (14) في معادلة (12) فينتج

$$(1-R)v_{1,1} = (4-2R)v_{1,0} - (1-R)(v_{1,1}-2) - v_{0,0} - v_{2,0} \qquad \dots(15)$$

وبعد تبسيط المعادلة (15) تصبح المعادلة كالاتي

$$2(1-R)v_{1,1} = (4-2R)v_{1,0} - v_{0,0} - v_{2,0} + 2(1-R) \qquad \dots(16)$$

الان نقوم بتعويض الشروط الابتدائية والشروط الحدودية وقيمة R في المعادلة (16)

$$2(1-0.0625)v_{1,1} = \big(4-2(0.0625)\big)(0.87758) - 1 - 0.5403 + 2(1-0.0625)$$

$$1.875v_{1,1} = 3.73532$$

$$\therefore\ v_{1,1} = 1.99217$$

$$i = 2 \quad , j = 0$$

$$(1-R)v_{2,\mathbf{1}} = (4-2R)v_{2,0} - (1-R)v_{2,-\mathbf{1}} - v_{\mathbf{1},0} - v_{3,0} \qquad \dots (17)$$

نجد قيمة $v_{2,-\mathbf{1}}$ من خلال المعادلة (11) عندما $i = 2$

$$v_{2,-\mathbf{1}} = v_{2,\mathbf{1}} - 2\Delta t g_2 \qquad \dots (18)$$

$$v_{2,-\mathbf{1}} = v_{2,\mathbf{1}} - 2(0.5)(2)$$

$$v_{2,-\mathbf{1}} = v_{2,\mathbf{1}} - 2 \qquad \dots (19)$$

وبتعويض المعادلة (19) في معادلة (17) نحصل على

$$(1-R)v_{2,1} = (4-2R)v_{2,0} - (1-R)(v_{2,\mathbf{1}} - 2) - v_{\mathbf{1},0} - v_{3,0} \qquad \dots (20)$$

وبعد التبسيط واجراء العمليات على المعادلة (20) تصبح المعادلة كالاتي

$$2(1-R)v_{2,\mathbf{1}} = (4-2R)v_{2,0} - v_{\mathbf{1},0} - v_{3,0} + 2(1-R) \qquad \dots (21)$$

الان نعوض الشروط الابتدائية والشروط الحدودية وقيمة Rفي معادلة (21) ينتج

$$2(1-0.0625)v_{2,\mathbf{1}} = \big(4-2(0.0625)\big)(0.5403) - 0.87758 - 0.07073 + 2(1-0.0625)$$

$$1.875v_{2,\mathbf{1}} = 3.02035$$

$$\therefore\ v_{2,\mathbf{1}} = 1.61085$$

$$i = 3 \quad , j = 0$$

$$(1-R)v_{3,\mathbf{1}} = (4-2R)v_{3,0} - (1-R)v_{3,-\mathbf{1}} - v_{2,0} - v_{4,0} \qquad \dots (22)$$

نجد قيمة $v_{3,-\mathbf{1}}$ من خلال المعادلة (11) عندما $i = 3$

$$v_{3,-\mathbf{1}} = v_{3,\mathbf{1}} - 2\Delta t g_3 \qquad \dots (23)$$

$$v_{3,-\mathbf{1}} = v_{3,\mathbf{1}} - 2(0.5)(2)$$

$$v_{3,-\mathbf{1}} = v_{3,\mathbf{1}} - 2 \qquad \dots (24)$$

وبتعويض المعادلة (24) في المعادلة (22) نحصل على الاتي

$$(1-R)v_{3,\mathbf{1}} = (4-2R)v_{3,0} - (1-R)(v_{3,\mathbf{1}} - 2) - v_{2,0} - v_{4,0} \qquad \dots (25)$$

وبعد التبسيط واجراء العمليات على المعادلة (25) تصبح المعادلة بالشكل الاتي

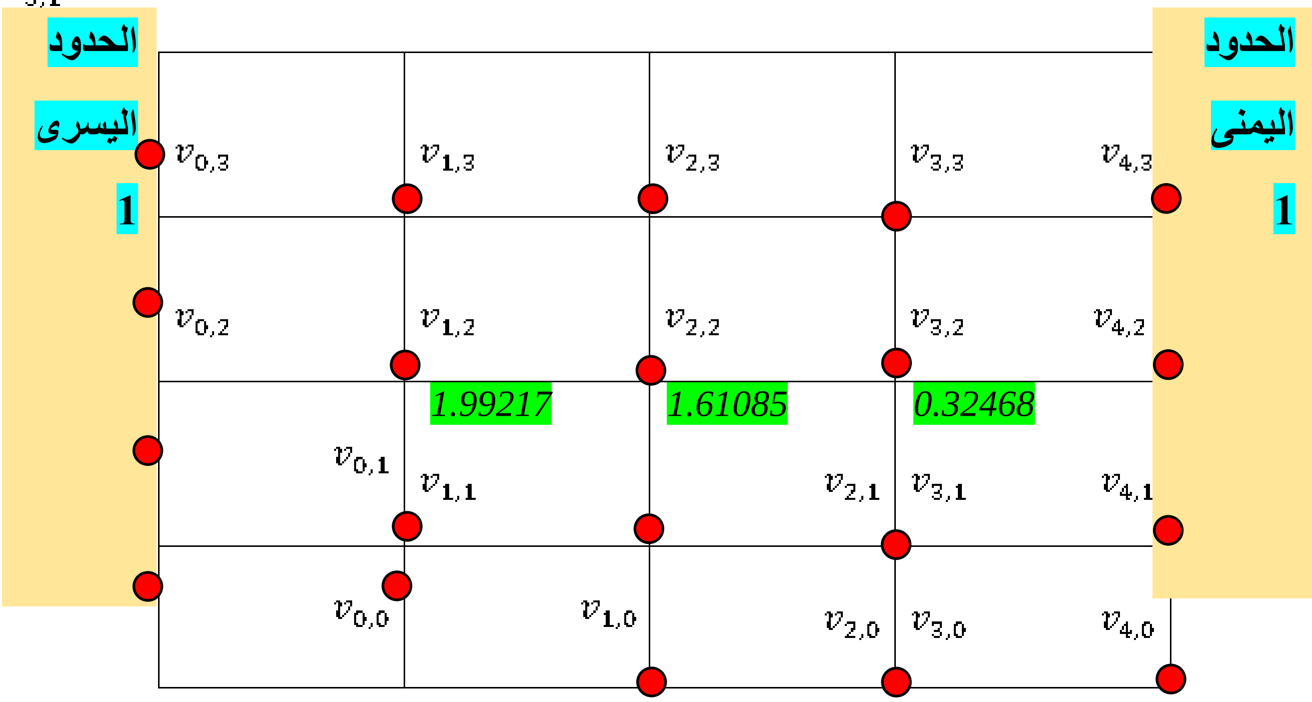
$$2(1-R)v_{3,1} = (4-2R)v_{3,0} - v_{2,0} - v_{4,0} + 2(1-R) \qquad \dots (26)$$

الان نعوض قيم الشروط الابتدائية وقيم الشروط الحدودية وقيمة Rفي المعادلة (26) نحصل على

$$2(1-0.0625)v_{3,1} = (4-2(0.0625)(0.07073) - 0.5403 - 1 + 2(1-0.0625)$$

$$1.875v_{3,1} = 0.60878$$

$$\therefore\ v_{3,1} = 0.3246$$



شكل (4) يبين توزيع قيم الشروط الابتدائية والحدودية على الشبكة بشكل نقاط عقدية في المستوى الأول.

الان عندما $i = 1,2,3 \quad ,j = 1$

$$i = 1 \quad ,j = 1$$

$$(1-R)v_{1,2} = (4-2R)v_{1,1} - (1-R)v_{1,0} - v_{0,1} - v_{2,1} \qquad \dots (27)$$

الان نعوض قيمة Rوقيم الشروط الابتدائية والشروط الحدودية في المعادلة (27) نحصل على

$$(1-0.0625)v_{1,2} = \big(4-2(0.0625)\big)(1.99217) - (1-0.0625)(0.87758) - 1 - 1.61085$$

$$0.9375v_{1,2} = 4.28608$$

$$\therefore\ v_{1,2} = 4.57182$$

$$i = 2 \;, \qquad j = 1$$

$$(1-R)v_{2,2} = (4-2R)v_{2,1} - (1-R)v_{2,0} - v_{1,1} - v_{3,1} \qquad \dots (28)$$

وبتعويض قيم الشروط الابتدائية وقيم الشروط الحدودية وقيمة R في المعادلة (28) ينتج

$$(1-0.0625)v_{2,2} = \big(4-2(0.0625)\big)(1.61085) - (1-0.0625)(0.5403)$$

$$-1.99217 - 0.32468$$

$$0.9375v_{2,2} = 3.41866$$

$$\therefore\; v_{2,2} = 3.64852$$

$$i = 3 \;, \qquad j = 1$$

$$(1-R)v_{3,2} = (4-2R)v_{3,1} - (1-R)v_{3,0} - v_{2,1} - v_{4,1} \qquad \dots (29)$$

نعوض قيمة Rوقيم الشروط الابتدائية وقيم الشروط الحدودية في المعادلة (29) نحصل على الاتي

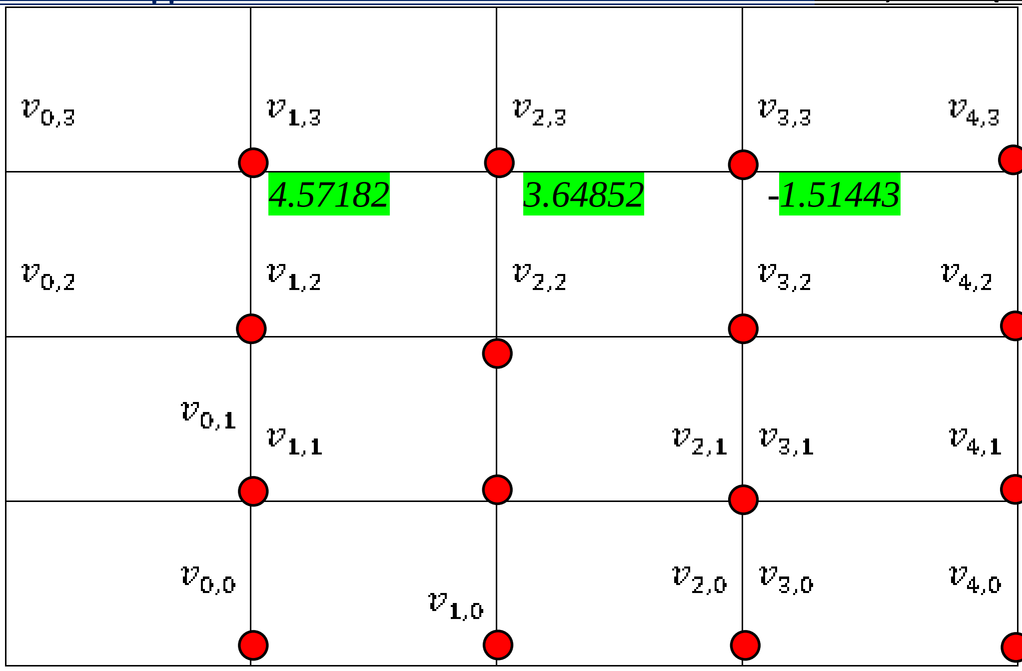
$$(1-0.0625)v_{3,2} = \big(4-2(0.0625)\big)(0.32468) - (1-0.0625)(0.07073) - 1.61085 - 1$$

$$0.9375v_{3,2} = -1.41902$$

$$\therefore\; v_{3,2} = -1.51443$$

الحدود اليسرى 1

الحدود اليمنى 1



شكل (5) يبين توزيع قيم الشروط الابتدائية والحدودية على الشبكة بشكل نقاط عقدية في المستوى الثاني.

الان عندما $i = 1,2,3 \quad , j = 2$

$$i = 1 \quad , \quad j = 2$$

$$(1-R)v_{1,3} = (4-2R)v_{1,2} - (1-R)v_{1,1} - v_{0,2} - v_{2,2} \qquad \dots(29)$$

وبتعويض قيمةR وقيم الشروط الابتدائية والشروط الحدودية في المعادلة (29) نحصل على الاتي

$$(1-0.0625)v_{1,3} = \big(4-2(0.0625)\big)(4.57182) - (1-0.0625)(1.99217) - 1$$
$$-3.64852$$

$$0.9375 v_{1,3} = 11.19962$$

$$\therefore \; v_{1,3} = 11.94626$$

$$i = 2 \quad , \quad j = 2$$

$$(1-R)v_{2,3} = (4-2R)v_{2,2} - (1-R)v_{2,1} - v_{1,2} - v_{3,2} \qquad \dots(30)$$

وبتعويض قيمة Rوقيم الشروط الابتدائية والشروط الحدودية في المعادلة (30) نحصل على الاتي

$$(1-0.0625)v_{2,3} = \big(4-2(0.0625)\big)(3.64852) - (1-0.0625)(1.61085)$$

$$-(4.57182)-(-1.51443)$$

$$0.9375v_{2,3} = 9.57038$$

$$\therefore\ v_{2,3} = 10.20841$$

$$i = 3\ ,\qquad j = 2$$

$$(1-R)v_{3,3} = (4-2R)v_{3,2} - (1-R)v_{3,1} - v_{2,2} - v_{4,2} \qquad \dots (31)$$

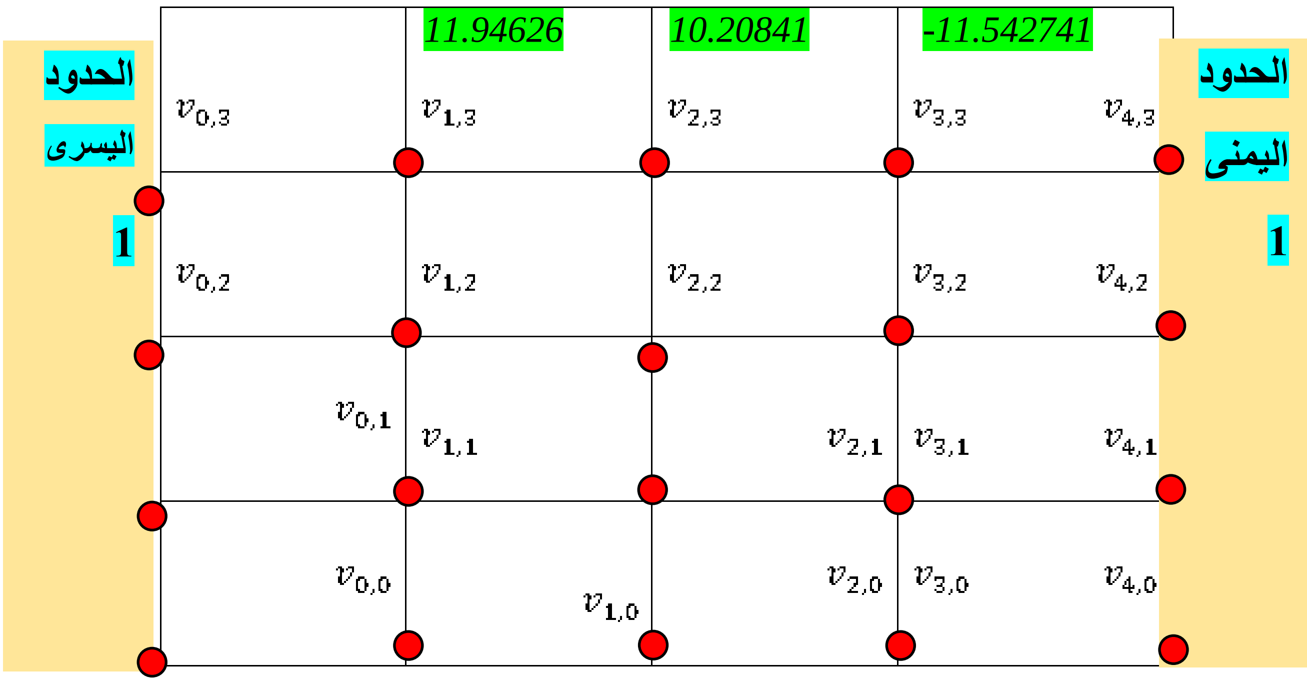
الان نعوض قيمة Rوقيم الشروط الحدودية وقيم الشروط الابتدائية في المعادلة (31) فينتج الاتي

$$(1-R)v_{3,3} = \left(4-2(0.0625)\right)(-1.51443) - (1-0.0625)(0.32468)$$

$$-3.64852 - 1$$

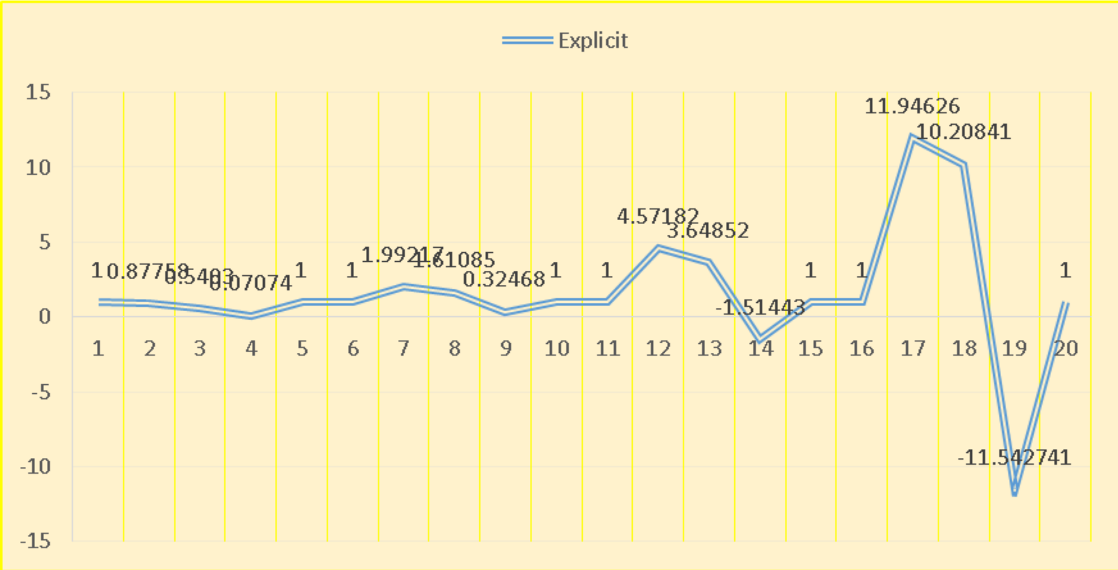
$$0.9375v_{3,3} = -10.82132$$

$$\therefore\ v_{3,3} = -11.542741$$



شكل (6) يبين توزيع قيم الشروط الحدودية والشروط الابتدائية على الشبكة بشكل نقاط عقدية في المستوى الثالث.

الان نرسم مخطط نبين فيه نتائج التي حصلنا عليها من الطريقة الصريحة كما مبين في الشكل (8).



شكل (7) يوضح نتائج الطريقة الصريحة.

7- الاستنتاجات.

ادناه اهم الاستنتاجات التي تم الحصول عليها من تطبيق الطريقتين الصريحة لحل معادلة الموجة ثنائية البعد

1- نتائج الطريقة كانت متطابقة تماماً في المستوى الأول وذلك لاعتمادها بشكل عام على الشروط الابتدائية كوننا استخدمنا الدالتين $g(x)$ دالة ثابتة و $f(x) = \cos x$ عند استخدام المعادلات التوافقية (معادلة الموجة في البعد الثنائي).

2- نتائج الطريقة كانت متقاربة والفرق بحدود (0.01) او اقل في المستوى الثاني عند حل معادلة الموجة في البعد الثنائي للمعادلات التوافقية.

3- هنالك فرق واضح بين نتائج الطريقة الصريحة في المستويات الأخرى من المستوى الثالث صعوداً وذلك بسبب الصيغة العامة لكل منهما والية احتساب فيهم نقاط الشبكة فيها.

8- التوصيات.

ادناه بعض التوصيات التي يمكن تقديمها للعمل المستقبلي في هذا المجال: -

1- استخدام الطريقة الصريحة في حل مسائل انتشار الغاز في البعدين الثنائي والثلاثي.
2- استخدام الطريقة الصريحة في حل مسائل الموجة في البعد الثنائي للمعادلات ثنائية التوافق.
3- استخدام الطريقة الصريحة في حل مسائل انتشار الحرارة للمعادلة ثنائية التوافق.
4- استخدام الطريقة الصريحة في حل بعض مسائل المرونة (انحناء الصفائح وهطولها، التشوه في الصفائح عند تسليط احمال مختلفة عليها).
5- استخدام طريقة الاتجاه المتناوب الضمنية العددية ((Alternative Implicit Direction Method) (ADI)) في حل مسائل الموجة في البعد الثنائي.

The Explicit Method for Solving the Two-Dimensional Wave Equation

Abstract:

In this research, we used the explicit method to solve the wave equation in the two-dimension with boundary and initial conditions, where we presented the general formulation of this method, and among them we used the general formulation of the wave equation in the two - dimension with initial conditions and boundary conditions within the period [0,2] and starting from time (t = 0) to a specified and known time $(i = l)$.

Keywords: Explicit method, wave equation. Two – dimensional wave equation

References

[1] Adak, M. "Comparison of explicit and implicit finite difference schemes on diffusion equation," in Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 2020, vol. 320, pp. 227–238. doi: 10.1007/978-981-15-3615-1_15

[2] Gaftan, A. M. "θ-Differencing Method for testing the Isolating Qualification of Some Materials," 2019. [Online]. Available: http://pjrpublication.com/

[3] Gakhov, F. D. (1990). Boundary value problems. Courier Corporation.

[4] Morton, K. W., & Mayers, D. F. (2005). Numerical solution of partial differential equations: an introduction. Cambridge university press.

[5] Recktenwald, G. W. (2004). Finite-difference approximations to the heat equation. Mechanical Engineering, 10(01).

[6] Sukhatme, S. P. (2005). *A textbook on heat transfer*. Universities Press.

[7] Thomas, J. W. (2013). Numerical partial differential equations: finite difference methods (Vol. 22). Springer Science & Business Media.

[8] Zill, D. G., & Cullen, M. R. (2009). Differential equations with boundary-value problems. 7thEdn. United States: Brooks/Cole.