

الحل العددي لمعادلة الحركة باستخدام مفهوم دالة الجريان

أمير زبير كريت¹ , احمد محمد جمعة²

^{1,2}قسم الرياضيات,كلية علوم الحاسوب و الرياضيات , جامعة الموصل , الموصل , العراق

¹Ameer.23csp83@student.uomosul.edu.iq

²Ahmed.M.j.jassim@uomosul.edu.iq

الحل العددي لمعادلة الحركة باستخدام مفهوم دالة الجريان

أمير زبير كريت¹ , احمد محمد جمعة²

^{1,2} قسم الرياضيات, كلية علوم الحاسوب و الرياضيات , جامعة الموصل , الموصل , العراق

¹Ameer.23csp83@student.uomosul.edu.iq

²Ahmed.M.j.jassim@uomosul.edu.iq

الخلاصة

تم في هذا البحث حل معادلة الحركة و التي قد نشأت من نموذج لجريان مائع محصور بين جدارين معزولين مع وجود تباين في درجات الحرارة لكليهما على طول المحور الذي يمر في منتصف القناة و بشكل دالة للمتغير العمودي بالإضافة الى وجود مجال مغناطيسي عمودي على المحور الافقي للقناة باعتبار ان المائع يتدفق بالاتجاه الموجب للمحور الافقي حيث ان في مثل هذه المسائل تتشكل مجموعة من المعادلات التي تتحكم في مثل هكذا نموذج و هي نوع من المعادلات التفاضلية الجزئية المتداخلة و التي تحتوي على متغيرات معتمدة متعددة و بعد حل معادلة الطاقة و هي احدى المعادلات المهمة التي تتحكم في مثل النموذج أعلاه و حساب قيمتها التقريبية باعتبارها معلومة و التي تؤثر على حركة جريان المائع و تعويضها في معادلة الحركة حيث تتشكل معادلة جديدة هي أيضاً معادلة تفاضلية جزئية خاضعة لشروط المسألة باستخدام طريقة الاتجاهات المتعاقبة الضمنية (ADI) وهي احدى طرق الفروقات المنتهية و التي استخدم فيها مفهوم دالة الجريان لغرض تحويل معادلة الحركة بدلالة متغيرين إلى معادلة بدلالة متغير واحد ولكن من الرتبة الرابعة و لأجل تطبيق طريقة ADI المصممة لمعالجة المعادلات ذات الرتبة الثانية تم استخدام مفهوم الدورية ξ (Vorticity) وبذلك تم تخفيض رتبة المعادلة من الرتبة الرابعة الى الرتبة الثانية ، وأصبحت معادلة الحركة بدلالة مفهوم الدورية و هي الصيغة التي يمكن استخدامها في الطريقة المذكورة اعلاه حيث انها معادلة تفاضلية جزئية من صيغة القطع المكافئ و تم الحصول على النتائج باستخدام قيم مختلفة لبعض البارامترات مثل عدد هارتمان ، عدد برانتدل و عدد رالي . و أظهرت النتائج أن هناك تأثير واضح على حركة الماء داخل القناة.

Abstract

In this research, the equation of motion was solved, which appeared from a model of the flow of a fluid confined between two insulated walls, with a temperature variation for both of them along the axis that passes through the middle of the channel and as a function of the vertical variable, in addition to the presence of a magnetic field perpendicular to the horizontal axis of the channel, considering the fluid flows in the positive direction of the horizontal axis. In such problems, a set of equations is formed that controls such a model. It is a type of nested partial differential equation that contains multiple dependent variables. After solving the energy equation, it is one of the important

equations that control In a model like the one above, its approximate value is calculated as a piece of information that affects the fluid flow movement, and its compensation is in the equation of motion, where a new equation is formed, which is also a partial differential equation subject to the conditions of the problem, using the successive implicit directions (ADI) method, which is one of the finite difference methods that was used. It contains the concept of the flow function for the purpose of converting the equation of motion in terms of two variables into an equation in terms of one variable, but of the fourth order. In order to apply the ADI method designed to treat second-order equations, the concept of vorticity (ξ) was used, and thus the rank of the equation was reduced from the fourth order to the second order. The equation of motion in terms of the concept of circularity became the form in which the above-mentioned method can be used, as it is a partial differential equation of the parabolic form. The results were obtained using different values for some parameters, such as the Hartmann number, the Prandtl number, and the Raleigh number. The results showed that there was a clear effect on the movement of water within the channel.

1. المقدمة

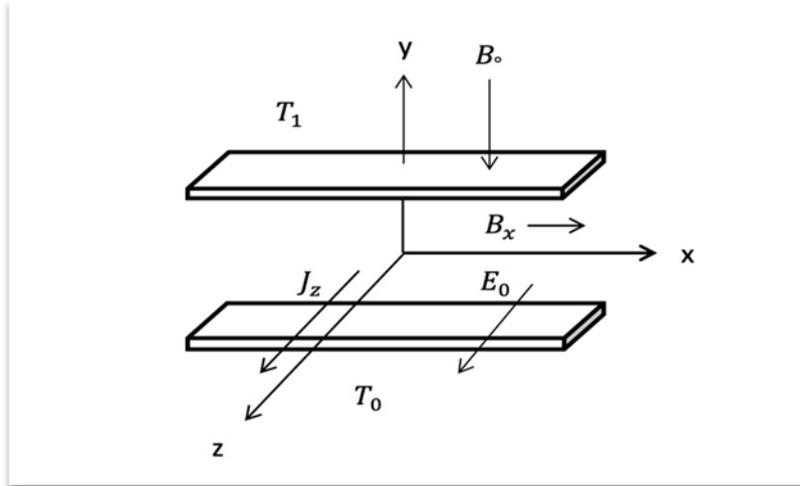
تعتبر الطرق العددية من اهم الطرق الرياضية في حل المسائل التطبيقية الناتجة من مسائل انتقال الحرارة داخل القنوات و الاوعية و في هذا البحث تم الحصول على معادلات تفاضلية جزئية مع الشروط الحدودية و التي تمثل معادلة من نوع القطع المكافئ حيث تم اختيار طريقة ADI التقريبية لحلها بعد استخدام مفهوم دالة الجريان حيث تتحول المعادلة الى معادلة من الرتبة الرابعة و تم بعد ذلك استخدام دالة الدورية (Vorticity) حيث تخفض رتبة المعادلة الى الرتبة الثانية و بالتالي يمكن حلها بالطريقة المذكورة أعلاه و هي طريقة تعتبر من الطرق التقريبية الجيدة و قد استخدمها كثير من الباحثين لإيجاد الحلول التقريبية لكثير من المسائل التطبيقية .

قدم Bansal و Verma دراسة حول تدفق مائع لزج غير قابل للانضغاط بين لوحين متوازيين، أحدهما في حركة منتظمة والآخر في حالة سكون مع شفق منتظم في اللوحة الثابتة [1]. وناقش Bhuyan و Hazarika تأثير المجال المغناطيسي على تدفق الدم النابض في قناة مسامية [2]. درس Taheri تأثير المجال المغناطيسي على تدفق الموائع وبين تأثير رقم هارتمان و رينولدز على طول التطور المغناطيسي وقوة لورنتز [3]. واستخدم Rasmussen واخرون طريقة عددية 3D-ADI-DG لحل مشكلة نقل الحرارة ثلاثية الأبعاد [4]. قام Mehta واخرون بدراسة تدفق الموائع التذبذبية وانتقال الحرارة عبر وسط مسامي بين الصفائح المتوازية في وجود مجال مغناطيسي مائل وتدفق حراري إشعاعي ومصدر للحرارة وتم حل معادلة الحركة التي تحكم تدفق الموائع باستخدام طريقة عددية وتمت ملاحظة تأثير البارامترات الفيزيائية المختلفة على حركة المائع [5]. قدم Almishlih الحل العددي بطريقة ADI لمعادلات الحركة والحرارة لمسألة تدفق الموائع في القناة الأفقي تحت تأثير المجال الإشعاعي وبين تأثير البارامترات مثل عدد برانتدل، عدد شميدت وعدد غراتشوف [6]. أيضاً استخدم كل من Amen و Jassim طريقة العددية ADI لحل مسألة كهرومغناطيسية في الاحداثيات القطبية [7]. وعالج Ala'a واخرون المعادلات التفاضلية الناتجة من

نموذج الرياضي لانتقال الحرارة بالحمل الحراري والاشعاع الحراري لمائع ينساب في قناة افقية وتحت تأثير مجال مغناطيسي عمودي على مستوى القناة باستخدام الطريقة العددية [8]. و في الدراسة الحالية تم حل معادلة الحركة باستخدام دالة الجريان و التي تؤدي الى تقليل عدد المتغيرات المعتمدة لمعادلة الحركة الا انها ترفع درجتها الى الرتبة الرابعة، وباستخدام مفهوم الدورية يتم تخفيض رتبها الى الرتبة الثانية و بالتالي يمكن حلها باستخدام الطريقة العددية ADI. وبعد الحصول على النتائج ظهر بأن هنالك تأثير لبعض المتغيرات المعروفة مثل عدد برانتدل و عدد هادتمان على اتجاه منحنيات الحركة داخل القناة .

2. التمثيل الهندسي للمسألة

يتكون النموذج من مقطع عرضي من قناة افقية وقد تم تسليط مجال كهرومغناطيسي ثابت B_0 عمودي على مستوى القناة مع وجود مائع موصل للكهربائية داخل القناة. فيتحول المائع الى مائع ممغنط، حيث نفرض إن درجة الحرارة عند الجدارين الافقيين تكون مختلفة، حيث T_0 تمثل درجة الحرارة عند الجدار الافقي السفلي و T_1 تمثل درجة الحرارة عند الجدار الافقي العلوي و تكون $T_1 > T_0$ ، ونفترض ان مجالاً مغناطيسياً عمودياً ثابتاً مسلط باتجاه المحور y حيث يتكون مائع ممغنط يجري باتجاه محور x وكذلك يتكون مجال كهرومغناطيسي مضاد باتجاه محور z حيث يكون مقداره صغيرة جدا يمكن اهماله . كما مبين في الشكل التالي:



2.1 فرضيات على المسألة:

بعد تحديد النموذج الرياضي قيد الدراسة، نضع بعض الشروط الرئيسية التي تصف المسألة وصفاً دقيقاً والشروط هي:

- ١- المائع الموجود داخل القناة غير قابل للانضغاط. ٢- خواص المائع تبقى ثابتة (بالنسبة للنموذج قيد الدراسة).
- ٣- لا يوجد مصدر حراري داخل القناة. ٤- لا يوجد مصدر للإشعاع.

2.2 المعادلات التي تحكم المسألة:

المعادلات المطلوبة لوصف النموذج قيد الدراسة كالآتي :

2.2.1 معادلة الاستمرارية

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (2.2.1)$$

حيث u^* و v^* هي مركبات السرعة باتجاه x^* و y^* على التوالي .

2.2.2 معادلة الكهرومغناطيسية

$$J_z = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_x}{\partial y^*} = \sigma(E_0 + u^*B_0 - v^*B_x). \quad (2.2.2)$$

حيث أن J_z هي كثافة الكهربية باتجاه z ، μ_0 اللزوجة الديناميكية لمائع ، B_x المجال المغناطيسي المولد باتجاه x ، B_0 مجال مغناطيسي مسط على القناة باتجاه محور y ، σ اللزوجة الكينماتية E_0 مجال كهربائي باتجاه z

2.2.3 معادلة الحركة

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t^*} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] - \vec{J} \times \vec{B} + \nabla P - \mu \nabla^2 \vec{V} = 0 \quad (2.2.3)$$

معادلة الحركة باتجاه محور x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \\ = -\frac{\partial p}{\rho \partial x^*} - \frac{\sigma E_0 B_0}{\rho} - \frac{\sigma B_0^2 u^*}{\rho} + \frac{\sigma B_0 B_x v^*}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u^* \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

معادلة الحركة باتجاه محور y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \\ = -\frac{\partial p}{\rho y^*} + \frac{\sigma E_0 B_x}{\rho} + \frac{\sigma B_0 B_x u^*}{\rho} - \frac{\sigma B_x^2 v^*}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v^* \\ - g\beta(T - T_0) \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

حيث ان t هي الوقت ، p هي الضغط ، ρ هي الكثافة ، g التبعيل الأرضي ، T درجة الحرارة المطلقة ، T_0 درجة الحرارة الابتدائية و β معامل التمدد الحراري .

ولتوحيد المعادلتين (2.2.4) و (2.2.5) نتبع ما يلي:

نشق المعادلة (2.2.4) بالنسبة الى y و المعادلة (2.2.5) بالنسبة الى x و بعد تبسيط المعادلتين نحصل على المعادلة التالية :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t^*} \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) + \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \left(u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) - \frac{\partial}{\partial y^*} \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \right] \\ & = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) - g\beta \left(\frac{\partial T}{\partial x^*} \right) + \frac{\sigma B_0 B_x}{\rho} \left[\frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right] - \frac{\sigma B_x^2}{\rho} \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \\ & + \frac{\sigma B_0^2}{\rho} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

و التي تمثل معادلة الحركة التي تتحكم بالمسألة.

2.2 الشروط الحدودية للمسألة:

الشروط التي تتحكم في المسألة هي ان السرعة عند جميع الحدود في حالة السكون أي ان:

$$u^* = v^* = w^* = 0$$

3. الصيغة اللابعدية

بعد إيجاد المعادلات الأساسية التي تتحكم في المسألة نجد ان هناك صعوبة في حل هذه المعادلات بصيغتها الحالية و لغرض حل المعادلات التي تتحكم في المسألة و لتبسيط صيغة المعادلات و وضعها في الحالة اللابعدية ندخل التعاريف اللابعدية التالي [9]، [10]، [11].

$$\begin{aligned} u &= \frac{u^*}{U} , \quad v = \frac{v^*}{U} , \quad x = \frac{x^*}{L} , \quad y = \frac{y^*}{L} , \quad U = \frac{a}{L} \sqrt{RaPr} = \sqrt{g\beta\Delta T E L} , \\ t &= \frac{Ut^*}{L} , \quad B_x = B_0 \mu_0 \sigma ULb , \quad \theta = \frac{T - T_0}{\Delta T} , \quad Ra = \frac{p g \beta \Delta T L^3}{\mu a} , \\ Pr &= \frac{U}{a} = \frac{C_p \mu}{k} , \quad Ha = B_0 L \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} \end{aligned}$$

حيث ان Ra ، Ha ، Pr يشير الى عدد برانتدل ، عدد هارتمان و عدد رالي على التوالي .
وبتعويض الصيغ اللابعدية ستحول المعادلات الأساسية الى الصيغة اللابعدية وكما يأتي:

3-1 معادلة الاستمرارية اللابعدية

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

3-2 معادلة الحركة اللابعدية

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\
&= \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \nabla^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial \theta}{\partial x} + IHa^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] - I^2 Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial v}{\partial x} \\
&+ Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial u}{\partial y}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$I = \frac{B_0}{B_x} \text{ بحيث}$$

4. حل معادلة الحركة Solve the Motion Equation

سنقوم باستخدام صيغة دالة الجريان ψ (Stream Function) ، و هذا معروف و متبع لغرض تحويل معادلة الحركة بدلالة متغيرين إلى معادلة الحركة بدلالة متغير واحد، و ذلك بتبسيط معادلة الحركة دون التأثير على عموميتها ، و وضعها ضمن اطار الحل بطريقة الاتجاهات المتعاقبة الضمنية (ADI) وذلك باستخدام التعريف التالي [12]، [13] :

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad , \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

بالتعويض في معادلة (3.2) وبعد التبسيط نحصل على:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial x^2} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right] \\
&= \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \nabla^2 \left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial \theta}{\partial x} + IHa^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right] \\
&+ I^2 Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

ومنها نحصل على:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi &= -\sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \nabla^4 \psi - \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2IHa^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + I^2 Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \\
&+ Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

ولأجل ان يكون الحل ممكناً سنفرض بأن المجال المحتث المتولد B_x يساوي B_0 وهذا يعني أن $I = 1$ إذا معادلة (4.2) تصبح بالشكل الآتي:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = -\sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \nabla^4 \psi - \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (4.3)$$

وبعد تبسيط معادلة (4.3) نحصل على:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = -\sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \nabla^4 \psi - \frac{\partial \theta}{\partial x} + Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] + Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] \quad (4.4)$$

ومنها نحصل على:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = -\sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \nabla^4 \psi - \frac{\partial \theta}{\partial x} + Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right] \quad (4.5)$$

و هذا يعني :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = -\sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \nabla^4 \psi - \frac{\partial \theta}{\partial x} + Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \nabla^2 \psi \quad (4.6)$$

ولتطبيق طريقة ADI المصممة لمعالجة المعادلات ذات الرتبة الثانية سنقوم باستخدام مفهوم الدورية (Vorticity)، وذلك بتخفيض رتبة المعادلة (4.6) وجعلها من الرتبة الثانية وذلك باستخدام التعريف التالي [12]:

$$\xi = -\nabla^2 \psi$$

وبالتعويض في المعادلة (4.6) نحصل على:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \nabla^2 \xi - \frac{\partial \theta}{\partial x} - Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \xi \quad (4.7)$$

ولحل المعادلة (4.7) باستخدام طريقة الاتجاهات المتعاقبة الضمنية (ADI) سنقوم بشرطها الى معادلتين الأولى باتجاه المحور x والثانية باتجاه المحور y كما يأتي:

اولاً: باتجاه محور x :

باستخدام صيغ الفروقات المركزية لدينا [14],[15] :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\xi_{i,j}^* - \xi_{i,j,n}}{\frac{\Delta t}{2}}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\xi_{i+1,j}^* - 2\xi_{i,j}^* + \xi_{i-1,j}^*}{(\Delta x)^2},$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{\xi_{i,j+1,n} - 2\xi_{i,j,n} + \xi_{i,j-1,n}}{(\Delta y)^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\theta_{i+1,j,n+1} - \theta_{i-1,j,n+1}}{2(\Delta x)}, \quad \xi = \xi_{i,j,n}$$

نعوض الصيغ أعلاه في معادلة (4.7) ينتج:

$$\frac{\xi_{i,j}^* - \xi_{i,j,n}}{\frac{\Delta t}{2}} = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left[\frac{\xi_{i+1,j}^* - 2\xi_{i,j}^* + \xi_{i-1,j}^*}{(\Delta x)^2} + \frac{\xi_{i,j+1,n} - 2\xi_{i,j,n} + \xi_{i,j-1,n}}{(\Delta y)^2} \right]$$

$$- \left[\frac{\theta_{i+1,j,n+1} - \theta_{i-1,j,n+1}}{2(\Delta x)} \right] - Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \xi_{i,j,n} \quad (4.8)$$

نضرب معادلة (4.8) في $\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$ ينتج:

$$\xi_{i,j}^* - \xi_{i,j,n} = \frac{\Delta t}{2} \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left[\frac{\xi_{i+1,j}^* - 2\xi_{i,j}^* + \xi_{i-1,j}^*}{(\Delta x)^2} + \frac{\xi_{i,j+1,n} - 2\xi_{i,j,n} + \xi_{i,j-1,n}}{(\Delta y)^2} \right]$$

$$- \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\theta_{i+1,j,n+1} - \theta_{i-1,j,n+1}}{2(\Delta x)} \right] - \frac{\Delta t}{2} Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \xi_{i,j,n} \quad (4.9)$$

ليكن $\beta = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}}$ ، $\Delta t = L$ ، $\Delta x = \Delta y = h$ نعوضها في المعادلة (4.2.2) ينتج :

$$\xi_{i,j}^* - \xi_{i,j,n} = \frac{L\beta}{2h^2} [\xi_{i+1,j}^* - 2\xi_{i,j}^* + \xi_{i-1,j}^* + \xi_{i,j+1,n} - 2\xi_{i,j,n} + \xi_{i,j-1,n}]$$

$$- \frac{L}{4h} [\theta_{i+1,j,n+1} - \theta_{i-1,j,n+1}] - \frac{L\beta}{2} Ha^2 \xi_{i,j,n} \quad (4.10)$$

وليكن $\gamma = \frac{L}{h^2}$ نعوض في المعادلة (4.2.3) نحصل على:

$$\xi_{i,j}^* - \xi_{i,j,n} = \frac{\gamma\beta}{2} [\xi_{i+1,j}^* - 2\xi_{i,j}^* + \xi_{i-1,j}^* + \xi_{i,j+1,n} - 2\xi_{i,j,n} + \xi_{i,j-1,n}]$$

$$- \frac{\gamma h}{4} [\theta_{i+1,j,n+1} - \theta_{i-1,j,n+1}] - \frac{\gamma\beta h^2}{2} Ha^2 \xi_{i,j,n} \quad (4.11)$$

وسيتم الحصول على:

$$\begin{aligned}
& \xi_{i,j}^* - \frac{\gamma\beta}{2} [\xi_{i+1,j}^* - 2\xi_{i,j}^* + \xi_{i-1,j}^*] \\
& = \xi_{i,j,n} + \frac{\gamma\beta}{2} [\xi_{i,j+1,n} - 2\xi_{i,j,n} + \xi_{i,j-1,n}] - \frac{\gamma\beta h^2}{2} Ha^2 \xi_{i,j,n} \\
& - \frac{\gamma h}{4} [\theta_{i+1,j,n+1} - \theta_{i-1,j,n+1}]
\end{aligned} \tag{4.12}$$

ومنها:

$$\begin{aligned}
& \xi_{i,j}^* - \frac{\gamma\beta}{2} \xi_{i+1,j}^* + \gamma\beta \xi_{i,j}^* - \frac{\gamma\beta}{2} \xi_{i-1,j}^* \\
& = \xi_{i,j,n} + \frac{\gamma\beta}{2} \xi_{i,j+1,n} - \gamma\beta \xi_{i,j,n} + \frac{\gamma\beta}{2} \xi_{i,j-1,n} - \frac{\gamma\beta h^2}{2} Ha^2 \xi_{i,j,n} \\
& - \frac{\gamma h}{4} [\theta_{i+1,j,n+1} - \theta_{i-1,j,n+1}]
\end{aligned} \tag{4.13}$$

ومنها نحصل على:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\gamma\beta}{2} \xi_{i-1,j}^* + [1 + \gamma\beta] \xi_{i,j}^* - \frac{\gamma\beta}{2} \xi_{i+1,j}^* \\
& = \frac{\gamma\beta}{2} \xi_{i,j-1,n} + \left[1 - \gamma\beta - \frac{\gamma\beta h^2}{2} Ha^2 \right] \xi_{i,j,n} + \frac{\gamma\beta}{2} \xi_{i,j+1,n} \\
& - \frac{\gamma h}{4} [\theta_{i+1,j,n+1} - \theta_{i-1,j,n+1}]
\end{aligned} \tag{4.14}$$

نقسم المعادلة (4.14) على $\left[\frac{\gamma\beta}{2}\right]$ ينتج:

$$\begin{aligned}
& -\xi_{i-1,j}^* + \frac{2[1 + \gamma\beta]}{\gamma\beta} \xi_{i,j}^* - \xi_{i+1,j}^* \\
& = \xi_{i,j-1,n} + \left[\frac{2(1 - \gamma\beta)}{\gamma\beta} - h^2 Ha^2 \right] \xi_{i,j,n} + \xi_{i,j+1,n} \\
& - \frac{h}{2\beta} [\theta_{i+1,j,n+1} - \theta_{i-1,j,n+1}]
\end{aligned} \tag{4.15}$$

نفرض إن:

$$g_1 = \frac{[1+\gamma\beta]}{\gamma\beta}, \quad g_2 = \frac{2[1-\gamma\beta]}{\gamma\beta} - h^2 Ha^2, \quad g_3 = \frac{h}{2\beta}, \quad g_4 = \theta_{i+1,j,n+1} - \theta_{i-1,j,n+1}$$

نعوض الفرضيات في المعادلة (4.15) نحصل على:

$$-\xi_{i-1,j}^* + 2g_1 \xi_{i,j}^* - \xi_{i+1,j}^* = \xi_{i,j-1,n} + g_2 \xi_{i,j,n} + \xi_{i,j+1,n} - g_3 g_4 \tag{4.16}$$

وعليه يكون:

$$A(i) = -1 \quad , \quad B(i) = 2g_1 \quad , \quad C(i) = -1 \quad ,$$

$$D(i) = \xi_{i,j-1,n} + g_2 \xi_{i,j,n} + \xi_{i,j+1,n} - g_3 g_4 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N$$

و بذلك يتكون لدينا نظام ثلاثي الأقطار (Tri-Diagonal System)، و سيتم إيجاد الحل بطريقة الحذف لكاوس [16]، و حل هذا النظام يمثل حل المعادلة الحركة (3.2) عند الزمن $\frac{t+1}{2}$.

ثانياً: باتجاه محور y:

باستخدام صيغ الفروقات المركزية لدينا [14]، [15]:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\xi_{i,j,n+1} - \xi_{i,j}^*}{\frac{\Delta t}{2}} \quad , \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\xi_{i+1,j}^* - 2\xi_{i,j}^* + \xi_{i-1,j}^*}{(\Delta x)^2} \quad , \quad \xi = \xi_{i,j,n+1}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{\xi_{i,j+1,n+1} - 2\xi_{i,j,n+1} + \xi_{i,j-1,n+1}}{(\Delta y)^2} \quad , \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\theta_{i+1,j,n+1} - \theta_{i-1,j,n+1}}{2(\Delta x)}$$

نعوض الصيغ أعلاه في معادلة (4.7) ينتج:

$$\begin{aligned} \frac{\xi_{i,j,n+1} - \xi_{i,j}^*}{\frac{\Delta t}{2}} = & \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left[\frac{\xi_{i+1,j}^* - 2\xi_{i,j}^* + \xi_{i-1,j}^*}{(\Delta x)^2} + \frac{\xi_{i,j+1,n+1} - 2\xi_{i,j,n+1} + \xi_{i,j-1,n+1}}{(\Delta y)^2} \right] \\ & - \left[\frac{\theta_{i+1,j,n+1} - \theta_{i-1,j,n+1}}{2(\Delta x)} \right] - Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \xi_{i,j,n+1} \end{aligned} \quad (4.17)$$

نضرب معادلة (4.17) في $\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$ ينتج:

$$\begin{aligned} & \xi_{i,j,n+1} - \xi_{i,j}^* \\ = & \frac{\Delta t}{2} \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left[\frac{\xi_{i+1,j}^* - 2\xi_{i,j}^* + \xi_{i-1,j}^*}{(\Delta x)^2} + \frac{\xi_{i,j+1,n+1} - 2\xi_{i,j,n+1} + \xi_{i,j-1,n+1}}{(\Delta y)^2} \right] \\ & - \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\theta_{i+1,j,n+1} - \theta_{i-1,j,n+1}}{2(\Delta x)} \right] - \frac{\Delta t}{2} Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \xi_{i,j,n+1} \end{aligned} \quad (4.18)$$

ليكن $\beta = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}}$, $\Delta t = L$, $\Delta x = \Delta y = h$ نعوضها في المعادلة (4.18) ينتج :

$$\begin{aligned} & \xi_{i,j,n+1} - \xi_{i,j}^* \\ &= \frac{L\beta}{2h^2} [\xi_{i+1,j}^* - 2\xi_{i,j}^* + \xi_{i-1,j}^* + \xi_{i,j+1,n+1} - 2\xi_{i,j,n+1} + \xi_{i,j-1,n+1}] \\ & - \frac{L}{4h} [\theta_{i+1,j,n+1} - \theta_{i-1,j,n+1}] - \frac{L\beta}{2} Ha^2 \xi_{i,j,n+1} \end{aligned} \quad (4.19)$$

وليكن $\gamma = \frac{L}{h^2}$ نعوض في المعادلة (4.19) نحصل على:

$$\begin{aligned} & \xi_{i,j,n+1} - \xi_{i,j}^* \\ &= \frac{\gamma\beta}{2} [\xi_{i+1,j}^* - 2\xi_{i,j}^* + \xi_{i-1,j}^* + \xi_{i,j+1,n+1} - 2\xi_{i,j,n+1} + \xi_{i,j-1,n+1}] \\ & - \frac{\gamma h}{4} [\theta_{i+1,j,n+1} - \theta_{i-1,j,n+1}] - \frac{\gamma\beta h^2}{2} Ha^2 \xi_{i,j,n+1} \end{aligned} \quad (4.20)$$

ومنها نحصل على:

$$\begin{aligned} & \xi_{i,j,n+1} - \frac{\gamma\beta}{2} [\xi_{i,j+1,n+1} - 2\xi_{i,j,n+1} + \xi_{i,j-1,n+1}] + \frac{\gamma\beta h^2}{2} Ha^2 \xi_{i,j,n+1} \\ &= \xi_{i,j}^* + \frac{\gamma\beta}{2} [\xi_{i+1,j}^* - 2\xi_{i,j}^* + \xi_{i-1,j}^*] - \frac{\gamma h}{4} [\theta_{i+1,j,n+1} - \theta_{i-1,j,n+1}] \end{aligned} \quad (4.21)$$

وسيتم الحصول على:

$$\begin{aligned} & \xi_{i,j,n+1} - \frac{\gamma\beta}{2} \xi_{i,j+1,n+1} + \gamma\beta \xi_{i,j,n+1} - \frac{\gamma\beta}{2} \xi_{i,j-1,n+1} + \frac{\gamma\beta h^2}{2} Ha^2 \xi_{i,j,n+1} \\ &= \xi_{i,j}^* + \frac{\gamma\beta}{2} \xi_{i+1,j}^* - \gamma\beta \xi_{i,j}^* + \frac{\gamma\beta}{2} \xi_{i-1,j}^* - \frac{\gamma h}{4} [\theta_{i+1,j,n+1} - \theta_{i-1,j,n+1}] \end{aligned} \quad (4.22)$$

ومنها نحصل على:

$$\begin{aligned} & -\frac{\gamma\beta}{2} \xi_{i,j-1,n+1} + \left[1 + \gamma\beta + \frac{\gamma\beta h^2}{2} Ha^2 \right] \xi_{i,j,n+1} - \frac{\gamma\beta}{2} \xi_{i,j+1,n+1} \\ &= \frac{\gamma\beta}{2} \xi_{i-1,j}^* + [1 - \gamma\beta] \xi_{i,j}^* + \frac{\gamma\beta}{2} \xi_{i+1,j}^* - \frac{\gamma h}{4} [\theta_{i+1,j,n+1} - \theta_{i-1,j,n+1}] \end{aligned} \quad (4.23)$$

نقسم المعادلة (4.23) على $\left[\frac{\gamma\beta}{2}\right]$ ينتج:

$$\begin{aligned} & -\xi_{i,j-1,n+1} + \left[\frac{2(1+\gamma\beta)}{\gamma\beta} + h^2 Ha^2 \right] \xi_{i,j,n+1} - \xi_{i,j+1,n+1} \\ & = \xi_{i-1,j}^* + \left[\frac{2(1-\gamma\beta)}{\gamma\beta} \right] \xi_{i,j}^* + \xi_{i+1,j}^* - \frac{h}{2\beta} [\theta_{i+1,j,n+1} - \theta_{i-1,j,n+1}] \end{aligned} \quad (4.24)$$

نفرض إن:

$$g_3 = \frac{h}{2\beta}, \quad g_4 = \theta_{i+1,j,n+1} - \theta_{i-1,j,n+1}, \quad g_5 = \frac{2[1+\gamma\beta]}{\gamma\beta} + h^2 Ha^2, \quad g_6 = \frac{(1-\gamma\beta)}{\gamma\beta}$$

نعوض الفرضيات في المعادلة (4.24) نحصل على:

$$-\xi_{i,j-1,n+1} + g_5 \xi_{i,j,n+1} - \xi_{i,j+1,n+1} = \xi_{i-1,j}^* + g_6 \xi_{i,j}^* + \xi_{i+1,j}^* - g_3 g_4 \quad (4.25)$$

وعليه يكون:

$$AA(i) = -1, \quad BB(i) = g_5, \quad C(i) = -1,$$

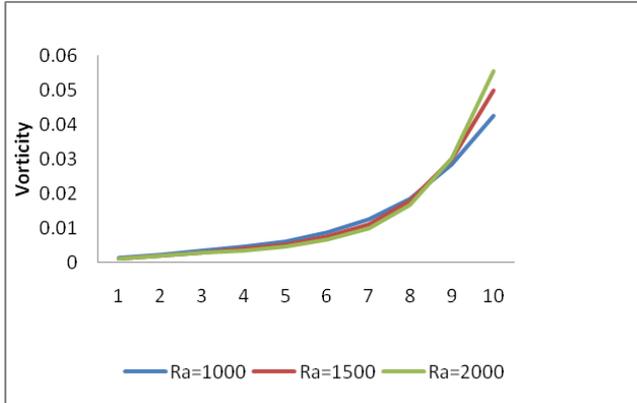
$$D(i) = \xi_{i-1,j}^* + 2g_6 \xi_{i,j}^* + \xi_{i+1,j}^* - g_3 g_4 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

و بذلك يتكون لدينا نظام ثلاثي الأقطار (Tri-Diagonal System)، و سيتم إيجاد الحل بطريقة الحذف لكوس [16]، و حل هذا النظام يمثل حل المعادلة الحركة (3.2) عند الزمن $t + 1$.

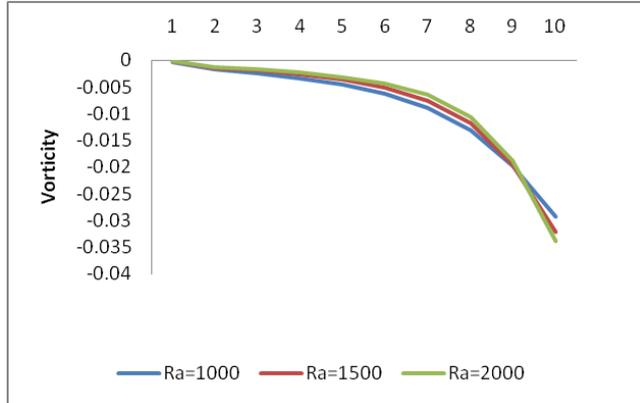
5. النتائج و الاشكال:

بعد حل معادلة الحركة التي تم الحصول عليها من النموذج الرياضي والتي تم تطويرها حسب ظروف المسألة مع الشروط الحدودية و باستخدام مفهوم دالة الجريان حيث تحولت الى معادلة من الرتبة الرابعة و لاجل استخدام طريقة الاتجاهات المتعاقبة الضمنية ADI تم تخفيض رتبة المعادلة الى الرتبة الثانية وذلك باستخدام مفهوم الدورية لغرض استخدام الطريقة المذكورة أعلاه ، و بعد تطوير الخوارزمية المناسبة لها باستخدام برنامج فورتران ، تم الحصول على النتائج و التي تمثل حركة المائع و تأثير البارامترات مثل عدد هارتمان ، عدد رالي و عدد براندتل على الحركة داخل القناة و كما موضح في الاشكال . و يلاحظ ان تأثير عدد رالي على حركة المائع طفيف جداً، كما مبين في الاشكال

(أ-١) و(ب-١)، ومن الاشكال (أ-٢)، (ب-٢)، (أ-٣) و(ب-٣) يلاحظ ان عدد برانتدل و عدد هارتمان لهما تأثير واضح على حركة المائع داخل القناة

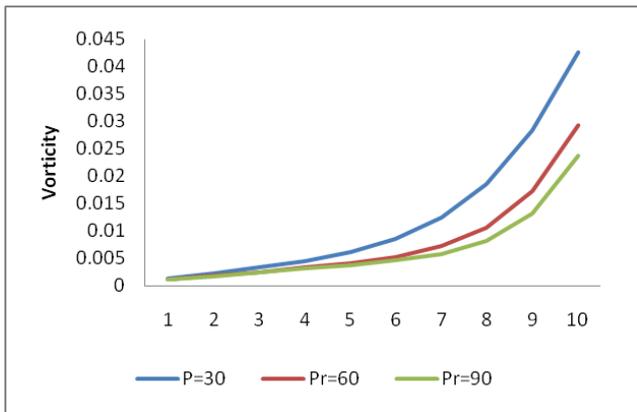


الشكل (ب-١)

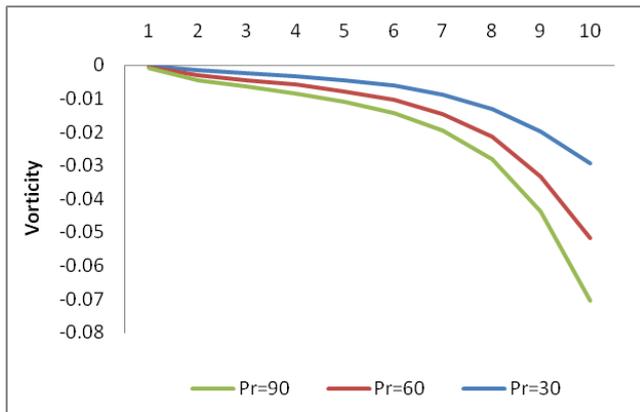


الشكل (أ-١)

الاشكال (أ-١) و(ب-١) يمثل تأثير عدد رالي على حركة المائع داخل قناة في منطقة البداية والنهاية على التوالي.

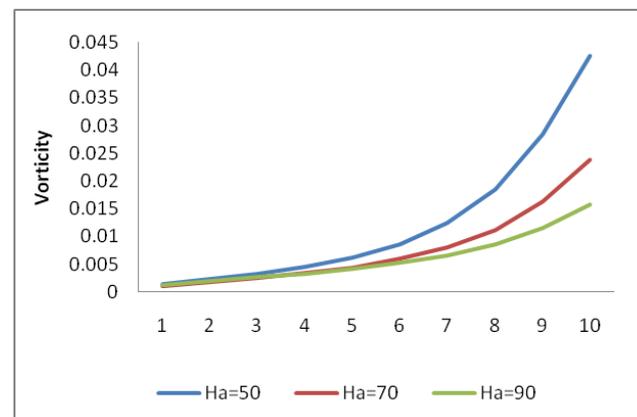


الشكل (ب-٢)

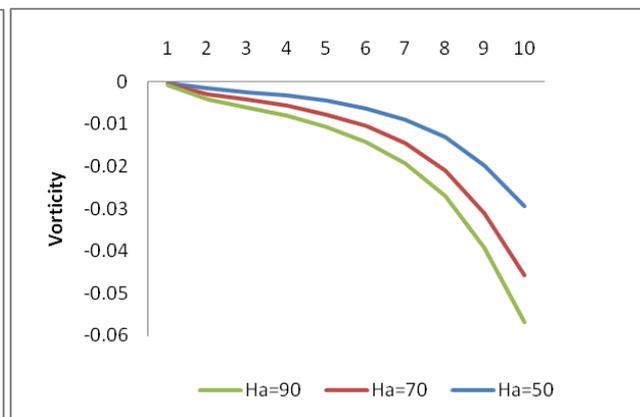


الشكل (أ-٢)

الاشكال (أ-٢) و (ب-٢) يمثل تأثير عدد برانتدل على حركة المائع داخل قناة في منطقة البداية والنهاية على التوالي.



الشكل (ب-٣)



الشكل (أ-٣)

الاشكال (أ-٣) و (ب-٣) يمثل تأثير عدد هارتمان على حركة المائع داخل قناة في منطقة البداية والنهاية على التوالي.

6. الاستنتاجات

من خلال هذه الدراسة توصلنا إلى انه وباستخدام بعض المفاهيم الرياضية المتعلقة بخواص الموائع مثل دالة الجريان والتي بواسطتها تم تخفيض عدد المتغيرات للمسألة وجعلها بدلالة متغير واحد فقط وبعد ذلك استخدم مبدأ آخر وهو الدردورية (Vorticity) وهي من خواص المائع ايضاً لأجل تخفيض رتبة المعادلة التي تم الحصول عليها باستخدام مفهوم دالة الجريان وهذا الأسلوب يختلف عن البحوث السابقة التي تم فيها حل مسائل مشابهة و بأساليب رياضية مختلفة و تبين من النتائج أن تأثير عدد رالي على حركة الماء داخل القناة قليل جداً حيث تراوحت قيم رالي بين ١٠٠٠ الى ٢٠٠٠ وكما موضح في الاشكال (أ-١) و (ب-١). وتأثير عدد برانتدل و عدد هارتمان اوضح على حركة الماء داخل القناة حيث تراوحت قيم برانتدل بين ٣٠ الى ٩٠ و تراوحت قيم هارتمان بين ٥٠ الى ٩٠ وكما موضح في الاشكال (أ-٢)، (ب-٢)، (أ-٣) و (ب-٣) على التوالي. وتبين أيضاً من الاشكال بأن الدالة الدردورية تتأثر داخل القناة عندما يتغير عدد برانتدل او عدد هارتمان.

المصادر:

- [1] P. D. Verma and J. L. Bansal, "Flow of a viscous incompressible fluid between two parallel plates, one in uniform motion and the other at rest with uniform suction at the stationary plate," in *Proceedings of the Indian Academy of Sciences-Section A*, Springer, 1966, pp. 385–396.
- [2] B. C. Bhuyan and G. C. Hazarika, "Effect of magnetic field on pulsatile flow of blood in a porous channel," *Bio-Sci Res. Bull.*, vol. 17, no. 2, pp. 105–112, 2001.
- [3] M. H. Taheri, "The influence of magnetic field on the fluid flow in the entrance region of channels: analytical/numerical solution," *SN Appl Sci*, vol. 1, no. 10, p. 1233, 2019.
- [4] F. S. Rasmussen, C. G. Klingaa, M. R. Sonne, and J. H. Hattel, "Numerical Modelling of Heat Transfer using the 3D-ADI-DG Method-with Application for Pultrusion.: Technical report," 2019.
- [5] T. Mehta, R. Mehta, and A. Mehta, "Oscillatory fluid flow and heat transfer through porous medium between parallel plates with inclined magnetic field, radiative heat flux and heat source," *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, vol. 25, no. 2, pp. 88–102, 2020.
- [6] Z. A. Almishlih, "Numerical solution of fluid flow in horizontal tube under effects of radiation field," *Open Access Library Journal*, vol. 7, no. 5, pp. 1–12, 2020.
- [7] A. M. J. Jassim and A. S. J. Amen, "Numerical Solution of Electromagnetic Problem MHD in a Polar Coordinates," *AL-Rafidain Journal of Computer Sciences and Mathematics*, vol. 15, no. 1, pp. 23–34, 2021.
- [8] A. H. Ala'a, O. T. Al-Bairaqdar, and A. T. Hammodat, "Numerical solution of energy equation in porous channels under effects of radiation field," *Iraqi Journal of Science*, pp. 3620–3633, 2021.
- [9] H. E. Marcroft and M. V. Karwe, "FLOW FIELD IN A HOT AIR JET IMPINGEMENT OVEN-PART I: A SINGLE IMPINGING JET," *J Food Process Preserv.*, vol. 23, no. 3, pp. 217–233, 1999.

- [10] Y. Yang, *Natural convective flow and heat transfer in vertical and inclined glazing cavities*. University of Massachusetts at Amherst, 2003.
- [11] M. K. Goyal, *Fluid Mechanics and Hydraulic Machines*. PHI Learning Pvt. Ltd., 2015.
- [12] A. A. Hammodat and H. D. Saleem, “Numerical solution of electromagnetic problem in horizontal porous medium.”
- [13] H. B. Wilson, L. H. Turcotte, and David. Halpern, *Advanced mathematics and mechanics applications using MATLAB*. Chapman & Hall/CRC, 2003.
- [14] A. ~R. Mitchell and D. ~F. Griffiths, *The finite difference method in partial differential equations*. 1980.
- [15] D. J. Duffy, “Finite Difference Methods in Financial Engineering : A Partial Differential Equation Approach.”
- [16] B. Carnahan, H. A. Luther, and J. O. Wilkes, *Applied numerical methods*, Wiley New York., vol. 2. 1969.